

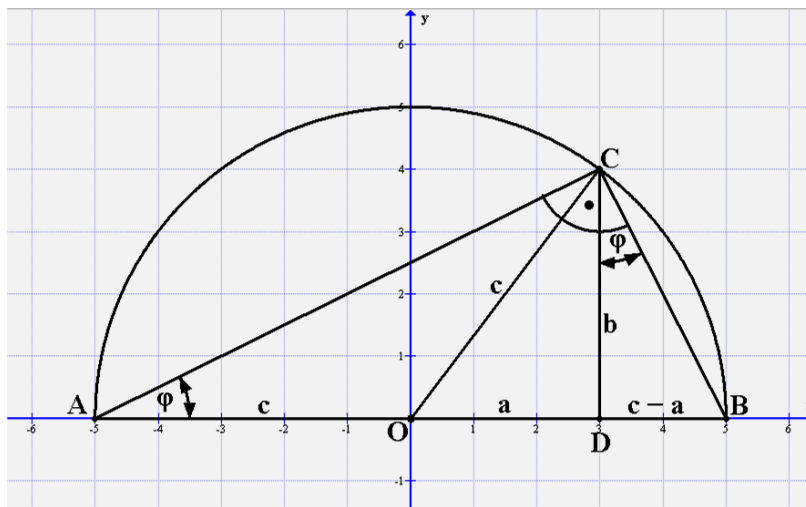
Nem hagyjuk szó nélkül

Megtaláltuk az interneten az [1] művet. Örömmel láttuk, hogy nagy része a középiskolások számára is hasznos ismereteket adhat. Most innen veszünk néhány feladatot, illetve tételt / tétel - igazolást, melyeket azért nem szó nélkül adunk át az Olvasónak.

Az adott tételre az [1] forrás kötet - és oldalszámával hivatkozunk.

I. / 8.: A Pitagorász - tétel egy újabb bizonyítása

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Eszerint – ahol *Thalész tétele* is alkalmazva lett – :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{c+a} = \frac{c-a}{b} \rightarrow b^2 = (c+a) \cdot (c-a) = c^2 - a^2, \text{ innen:}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2},$$

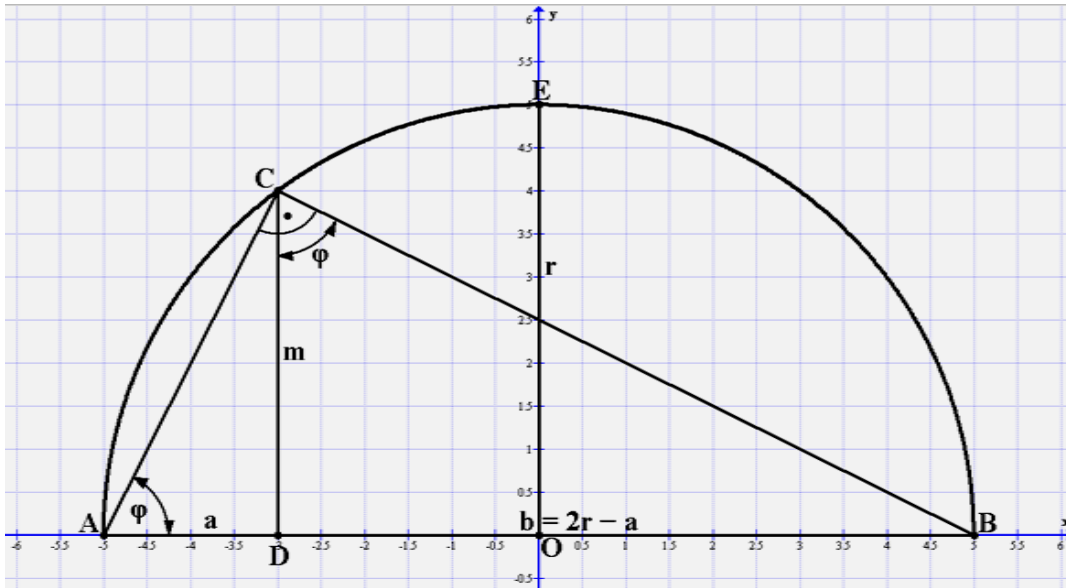
a *Pitagorász - tétel* alapösszefüggése adódik.

Megjegyezzük, hogy az 1. ábra más tételek igazolására is használható. Ilyenek pl. a két - szeres - , illetve a fél - szöges trigonometriai azonosságok némelyike.

Továbbá megemlítjük, hogy az 1. ábra éppen a (3, 4, 5) pitagorászi számhármassal alkal - mazásával készült.

I. / 49.: A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség egyik igazolása

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Eszerint:

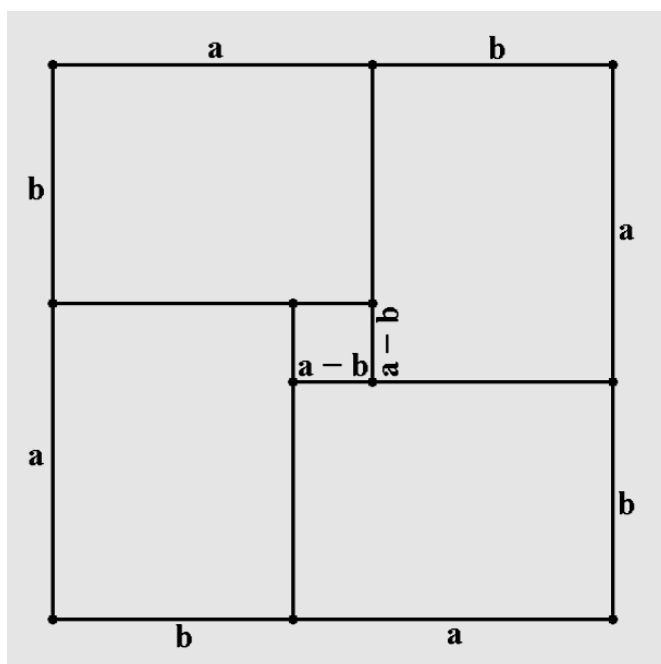
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{a} = \frac{b}{m} \rightarrow m^2 = a \cdot b \rightarrow m = \sqrt{a \cdot b}, \text{ továbbá a 2. ábra szemlélete alapján:}$$

$$m = \sqrt{a \cdot b} \leq r = \frac{a+b}{2}, \text{ tehát:}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}}, \text{ egyenlőség csak } a = b (= r) \text{ esetén áll fenn.}$$

I. / 50.: A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség egy másik igazolása

Ehhez tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

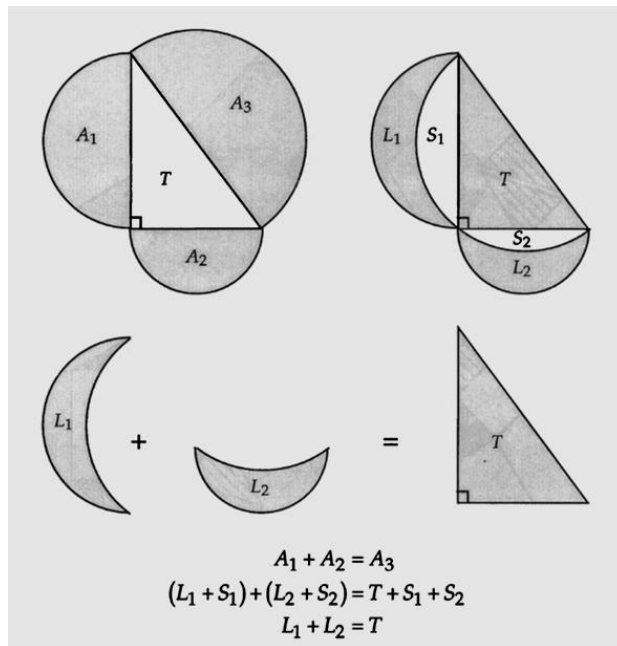
Ez alapján írhatjuk, hogy:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4 \cdot a \cdot b \rightarrow (a+b)^2 \geq 4 \cdot a \cdot b \rightarrow a+b \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}, \text{ innen:}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}}, \text{ egyenlőség csak } a = b \text{ esetén áll fenn.}$$

II. / 10.: Khiosz - i Hippokratész holdacskáiról szóló tétel igazolása

Ehhez tekintsük a 4. ábrát!



4. ábra – forrása: [1]

1. A 4. ábra bal felső részén azt látjuk, hogy egy **a, b, c** derékszögű háromszög oldalaira félköröket rajzoltak. Először is azt állítják, hogy a befogókra rajzolt sötétszürke félkörök területösszege egyenlő a háromszög átfogójára rajzolt félkör területével, azaz:

$$A_1 + A_2 = A_3, \quad (*)$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow \underline{a^2 + b^2 = c^2}. \quad (**)$$

Mivel a derékszögű háromszögre fennáll *Pitagorász* (**) szerinti tétele, így (*) valóban fennáll, amiről (**) $\rightarrow$ (*) szerinti olvasással is meggyőződhetünk.

2. A 4. ábra jobb felső részén azt látjuk, hogy az A_3 területű félkört tükrözték a háromszög átfogójára, amivel előállt az a helyzet, hogy a félkör átmegy a háromszög derékszögénél lévő csúcán, *Thalész tétele* miatt is. Ekkor kirajzolódnak az S_1 és S_2 területű, világosszürke körszeletek, valamint az L_1 és L_2 területű sötétszürke holdacskák is. Az ábra szerint adódik, hogy:

$$A_1 = L_1 + S_1, \quad A_2 = L_2 + S_2, \quad A_3 = T + S_1 + S_2. \quad (**)$$

Most (*) és (**) - gal:

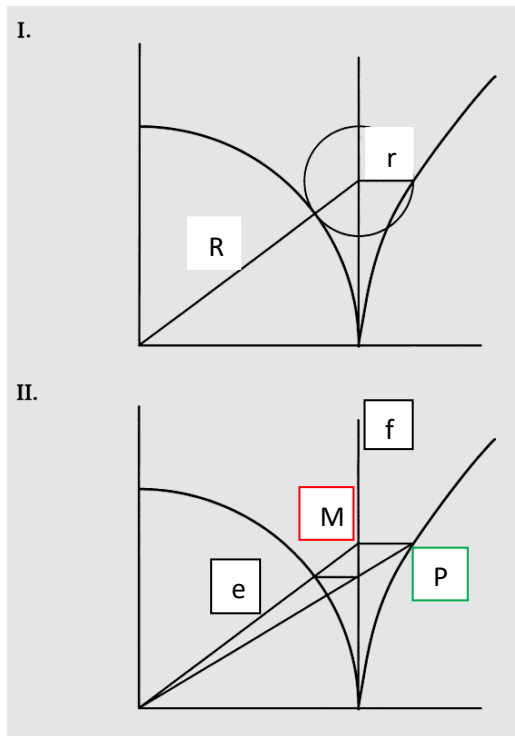
$$(L_1 + S_1) + (L_2 + S_2) = T + S_1 + S_2, \text{ innen:}$$

$$\boxed{L_1 + L_2 = T},$$

vagyis azt kaptuk, hogy *a holdacskák területének összege egyenlő a derékszögű háromszög területével*. Ezzel kimondtuk és egyben igazoltuk is a tételt.

II. / 66.: Hiperbola szerkesztése két körrel

Ehhez tekintsük az 5. ábrát!



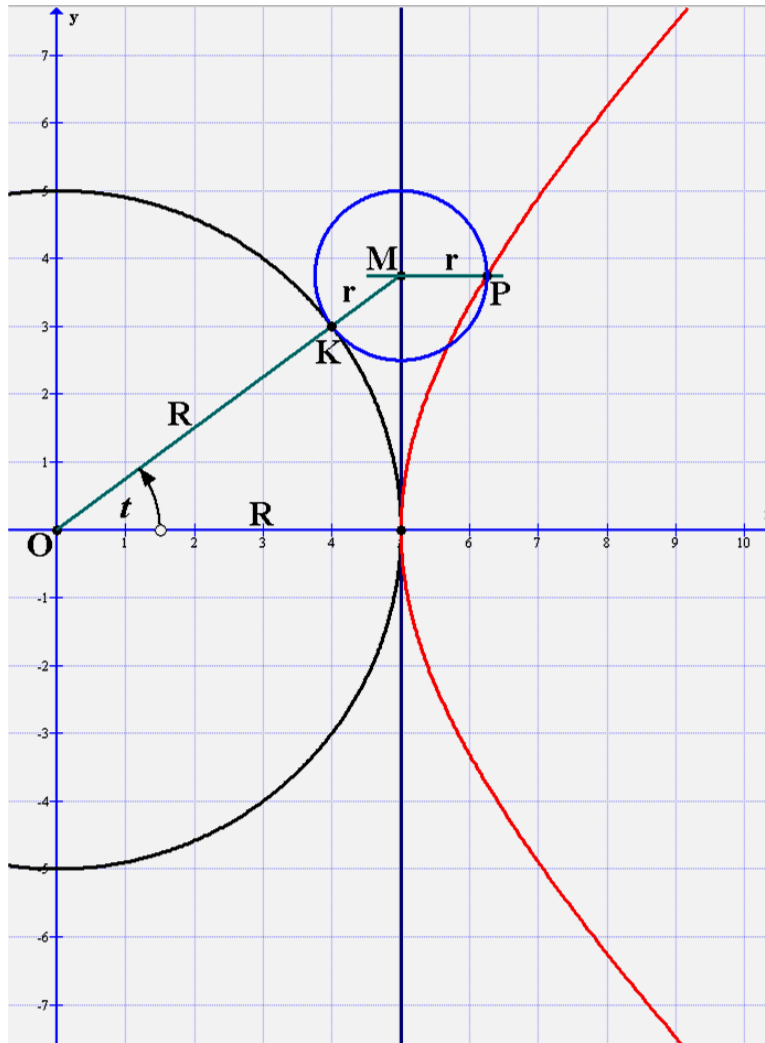
5. ábra – forrása: [1]

Ha ez igaz, akkor úgy is szerkeszthetünk hiperbolát, hogy egy **R** sugarú „nagy” körrel érintkezik egy **r** változó sugarú „kis” kör, ahol a kis kör középpontja a nagy kör átmérőjének egyik végpontján átmenő egyenes mentén halad – ld. I. jelű felső ábrarész.

A II. jelű alsó ábrarész szerint a nagy kör középpontjából meghúzott **e** ferde egyenessel elmetsszük az **f** függőleges egyenest. A kis kör **r** sugara nem más, mint **e** és **f** **M** metszéspontjának a nagy körtől való, az **e** ferde egyenes mentén mért távolsága.

A **M** középpontból a **r** sugárral rajzolt kör és az **M** ponton átmenő vízszintes egyenes metszéspontja adja a **P** hiperbola - pontot.

Számításos igazolásunkhoz tekintsük a 6. ábrát!



6. ábra

Ez alapján:

$x_P = R + r = \frac{R}{\cos t}$, $y_P = R \cdot \operatorname{tg} t$; ezzel a görbe *paraméteres egyenletrendszere* – a p index elhagyásával –:

$$\underline{x(t) = \frac{R}{\cos t}, \quad y(t) = R \cdot \operatorname{tg} t, \quad 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi, \quad t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2};} \quad (p)$$

majd:

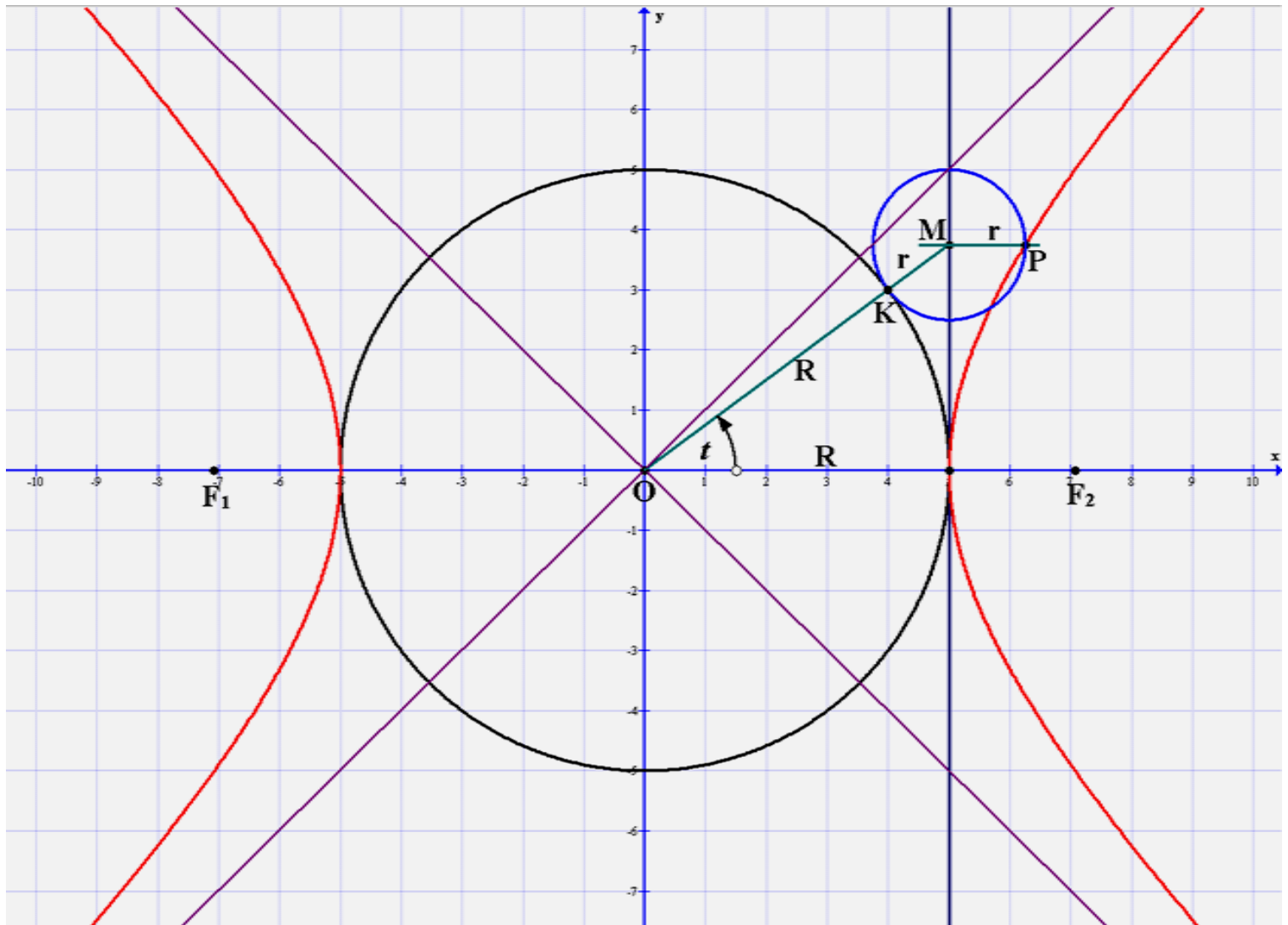
$$x^2 = \frac{R^2}{\cos^2 t} = R^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 t), \quad y^2 = R^2 \cdot \operatorname{tg}^2 t \rightarrow \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = (1 + \operatorname{tg}^2 t) - \operatorname{tg}^2 t = 1,$$

tehát:

$$\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad a = b = R. \quad (k)$$

A (p) és (k) képletek egy (speciális = derékszögű) hiperbolát írnak le – [2].

A 7. ábrán a teljes (kétágú) derékszögű hiperbolát ábrázoltuk, az egymásra merőleges aszimptotaival, valamint fókuszaival együtt.



7. ábra

Megjegyzések:

M1. A tételek magyar elnevezését és a nevek írását illetően figyeltünk [2] - re is.

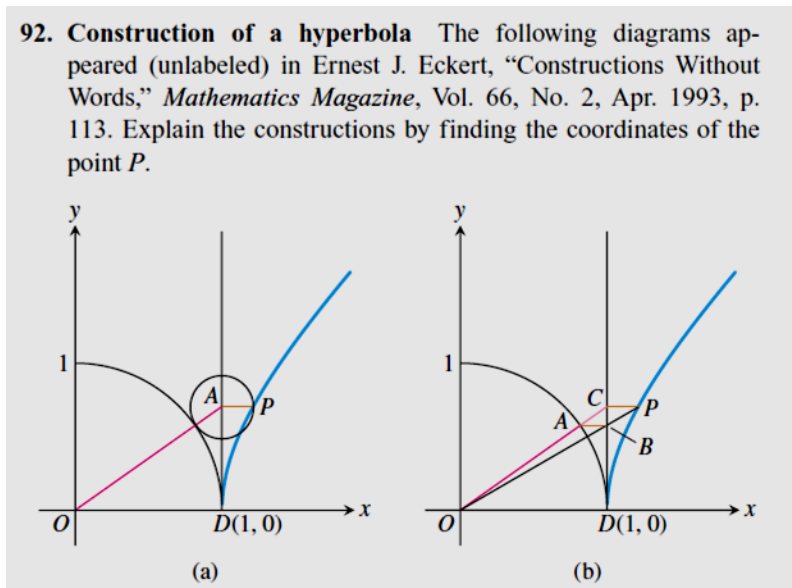
M2. Ügyes ötlet, hogy megadják a tételt, magyarázó ábrájával együtt, a tanuló pedig fejtse meg az igazolás mibenlétét, illetve az ábra alapján végezze el az igazolást.

M3. A 4. ábra jól szemlélteti, hogy mit jelent a „Bizonyítások szavak nélkül”.

M4. Az **I. / 49.** szerinti bizonyítást mi annak idején a középiskolában tanultuk, a Matematika tantárgy óráin. Valószínű, hogy ez ismerős a mai középiskolásoknak is.

M5. Azt találtuk, hogy az 5. ábra szerkesztése valóban hiperbolapontot ad, azonban e hiperbola nem az általános esetet példázza.

Az 5. ábrához hasonlót [3] - ban is találtunk, ahol szintén csak feladják a feladatot, de nem oldják meg – 8. ábra. Itt nem [1] - re hivatkoznak, forrásként.



8. ábra

M6. Meglehet, a **II. / 66.** feladat feladói nem számításos, hanem szerkesztéses megoldásra, illetve a mutatott szerkesztés helyességének geometriai belátására gondoltak. Ennek feltételezésére a 8. ábra szövege ad okot. Ki tudja...

M7. Meglepő, de valójában **II. / 66.** esete az első, amiben találkoztunk a hiperbola fenti – tehát a (p) - típusú – paraméteres egyenletrendszeréhez tartozó szerkesztéssel. Mert egy dolog az algebrai belátás, és egy másik az ezzel kapcsolt geometriai konstrukció. Hátravan még a (p) - nél általánosabb $b \neq a$ eset fenti típusú paraméteres egyenletrendszeréhez tartozó geometriai szerkesztéssel való találkozás.

Források:

[1] – **Roger B. Nelsen:** Proofs without Words I., II.

The Mathematical Association of America , USA, 1993., 2000.

[2] – **Reiman István**: Matematika
Typotex Kiadó, Budapest, 2011.

[3] – **Maurice D. Weir ~ Joel Hass ~ Frank R. Giordano**: Thomas' Calculus
Addison - Wesley, 2010.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 05. 25.